2. Desarrollar una discusión completa de la ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

3. Dados los focos y la longitud de su eje mayot, demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadras y compás.

4. Demostrar un procedimiento para obtener puntos de una elipse usando escuadra y compás si se conocen sus ejes mayor y menor.

5. Demostrar que la circunferencia es un caso particular de la elipse cuya excentricidad vale cero.

En cada uno de los ejercicios 6-9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.

6. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

9. $x^2 + 3y^2 = 6$.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

11. Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$, y sus focos son los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$. Hallar su ecuación.

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

13. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

14. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

15. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

$\frac{2a}{2b} = \frac{2b}{\frac{2b^2}{a}}$

17. Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

$\frac{\;}{b} = \frac{b}{\;}$

18. Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

19. Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

20. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

21. Hallar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

las longitudes.

22. Los puntos extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores FP_1 y FP_2 es igual a la longitud del eje mayor.

23. Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene de excentricidad $\frac{1}{2}$.

En cada uno de los ejercicios 24-26, usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

24. Focos (3, 8) y (3, 2); longitud del eje mayor = 10.
25. Vértices (− 3, − 1) y (5, − 1); excentricidad = $\frac{3}{4}$.
26. Vértices (2, 6) y (2, − 2); longitud del lado recto = 2.

27. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto (0, − 2).

28. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

29. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en la razón 1 : 4. (Dos soluciones.)

30. Un segmento AB de longitud fija se mueve de tal manera que su extremo A permanece siempre sobre el eje X y su extremo B siempre sobre el eje Y. Si P es un punto cualquiera, distinto de A y B, y que no esté sobre el segmento AB o en su prolongación, demuéstrese que el lugar geométrico de P es una elipse. Un instrumento basado sobre este principio se usa para construir elipses teniendo como datos los ejes mayor y menor.

62. Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados. Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X tal como se indica en la figura 89. Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, del teorema 1, Artículo 61, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

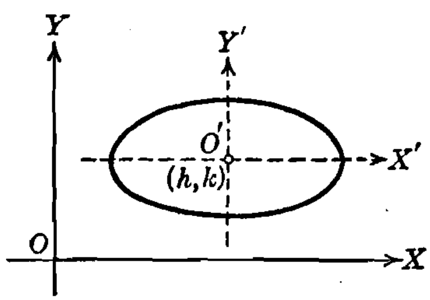

Fig. 89

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

$$\frac{\overline{OQ}^2}{a^2} + \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1.$$

5. Aplicando la propiedad intrínseca de la elipse, establecida en el ejercicio 4, deducir las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse.

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$
14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$
15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$
16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

17. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 62 trasladando los ejes coordenados.

18. Resolver el ejercicio 16 por traslación de los ejes coordenados.

19. Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

20. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

21. Hallar la ecuación de la familia de elipses que tienen un centro común $(2, 3)$, un eje focal común paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual

a $\frac{1}{2}$. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

22. La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 1)$.

23. La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.

24. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

25. El punto medio de una cuerda de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto $(5, 2)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

26. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

27. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

28. Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

29. La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos $(0, 0)$ y $(6, 0)$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

30. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $x^2+y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

63. Propiedades de la elipse. Muchas de las propiedades más importantes de la elipse están asociadas con sus tangentes. Como la ecuación de una elipse es de segundo grado, sus tangentes pueden determinarse empleando la condición para la tangencia estudiada en el Artículo 44. El procedimiento para la resolución de problemas relativos a tangentes a la elipse es, por lo tanto, idéntico al usado para la circunferencia (Art. 45) y la parábola (Art. 57). Por esto, se deja como ejercicio el demostrar los teoremas 4 y 5 que enunciamos a continuación:

TEOREMA 4. *La tangente a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *en cualquier punto* $P_1(x_1, y_1)$ *de la curva tiene por ecuación*

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

TEOREMA 5. *Las ecuaciones de las tangentes de pendiente* m *a la elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *son*

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

4. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 5 del Artículo 63: Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ son } y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}.$$

(Véase el ejercicio 16 del grupo 18, Art. 45.)

5. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6. $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, -1)$.

7. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$.

9. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

11. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;

b) son tangentes a la elipse;

c) no cortan a la elipse.

12. Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $3x^2 + 4y^2 = 43$ y $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

13. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

14. Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$.

15. Se tienen como datos una elipse y sus focos. Por medio del teorema 6 (Art. 63) demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la elipse.

16. Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por su centro, la elipse es una circunferencia.

17. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

18. Demostrar que la pendiente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

19. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

20. Por el punto $(2, 7)$ se trazan tangentes a la elipse

$$2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0.$$

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.